

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς x_1 και x_2 να αποδείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Μονάδες 10

- A2.** Να αντιστοιχίσετε κάθε μία εξίσωση της στήλης Α με την λύση της από την στήλη Β μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα 1 σωστά συμπληρωμένο.

ΣΤΗΛΗ Α Εξισώσεις	ΣΤΗΛΗ Β Λύσεις
1. $x^2 - 4 = 0$	A. $x = 2$
2. $x^3 = -8$	B. Αδύνατη
3. $x^2 - 4x + 4 = 0$	Γ. $x = -2$
4. $x^2 - x - 2 = 0$	Δ. $x = 2$ ή $x = -1$
5. $x^2 = -4$	Ε. $x = 2$ ή $x = -2$

Πίνακας 1				
1	2	3	4	5

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2$

β. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha| \geq \alpha$

γ. Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ είναι αόριστη.

δ. Ισχύει $\sqrt{x^2} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε. Οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 2x - 8 < 0$ (1)

Μονάδες 8

B2. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| > 1$ (2)

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να τις γράψετε με την μορφή διαστήματος.

Μονάδες 4

B4. Να δείξετε ότι ο αριθμός $a = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων (1) και (2).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.
Μονάδες 9

Για $f(x) = x + 2$ με $x \neq 3$:

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $x_2 = -2 \cdot f\left(-\frac{3}{2}\right)$.
Μονάδες 7

Γ3. Αν $x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0$ η εξίσωση του παραπάνω ερωτήματος να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \left(\frac{2023}{2022}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2023}{2022}\right) - 5$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (3\lambda - 1)x + 2 - \lambda = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι $\Delta = 9\lambda^2 - 2\lambda - 7$
Μονάδες 4

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 .
Μονάδες 4

Δ2. Αφού υπολογίσετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ να αποδείξετε ότι

$$x_1^2 + x_2^2 = 9\lambda^2 - 4\lambda - 3$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του λ η παράσταση:

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 (9 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2) - 6(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση (1) να έχει θετικές ρίζες.

Μονάδες 5